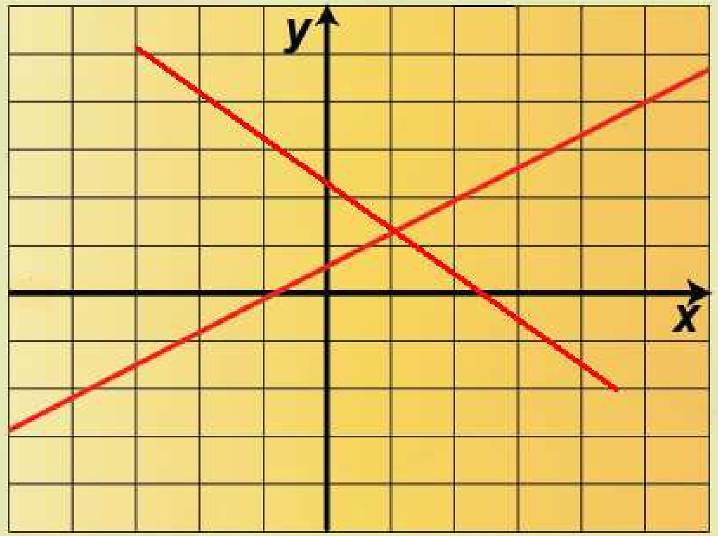
UKŁADY ROWNAŃ LINIOWYCH
Z DWIEMA NIEWIADOMYMI



UKŁAD RÓWNAŃ PIERWSZEGO STOPNIA Z DWIEMA NIEWIADOMYMI

Układem równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi nazywamy dwa równania pierwszego stopnia z co najwyżej dwiema niewiadomymi, połączone spójnikiem „i", który symbolizuje klamra.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

x, y - to niewiadome

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ - to współczynniki liczbowe $\in \mathbb{R}$

Rozwiązaniem układu równań jest każda para liczb (x, y) spełniających oba równania.

Przykład
$$\begin{cases} 2x - 6y = 12 \\ -x + 4y = 20 \end{cases}$$

rozwiązanie:
$$\begin{cases} x = 84 \\ y = 26 \end{cases}$$

sprawdzenie:
$$\begin{cases} 2 \cdot 84 - 6 \cdot 26 = 12 \\ -84 + 4 \cdot 26 = 20 \end{cases}$$

UKŁAD RÓWNAŃ LINIOWYCH Z DWIEMA NIEWIADOMYMI

Układ równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi nazywamy także **układem równań liniowych**, gdyż oba równania układu

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

są równiami linii prostych, łatwo można je przekształcić do postaci kierunkowej

$$\boxed{y = ax + b}$$

Przykład

$$\begin{cases} 2x - 6y = 12 \\ -x + 4y = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6y = 12 - 2x \\ 4y = 20 + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3}x - 2 \\ y = \frac{1}{4}x + 5 \end{cases}$$

RODZAJE UKŁADÓW

UKŁAD OZNACZONY to taki układ, który ma dokładnie jedno rozwiązanie (x, y) .

Przykład $\begin{cases} 2x - 6y = 12 \\ -x + 4y = 20 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 84 \\ y = 26 \end{cases}$

UKŁAD NIEOZNACZONY to układ, który ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Przykład $\begin{cases} 8x - 4y = 20 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 4y = 20 \quad / :4 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$

proste pokrywają się

UKŁAD SPRZECZNY to układ, który nie ma żadnych rozwiązań.

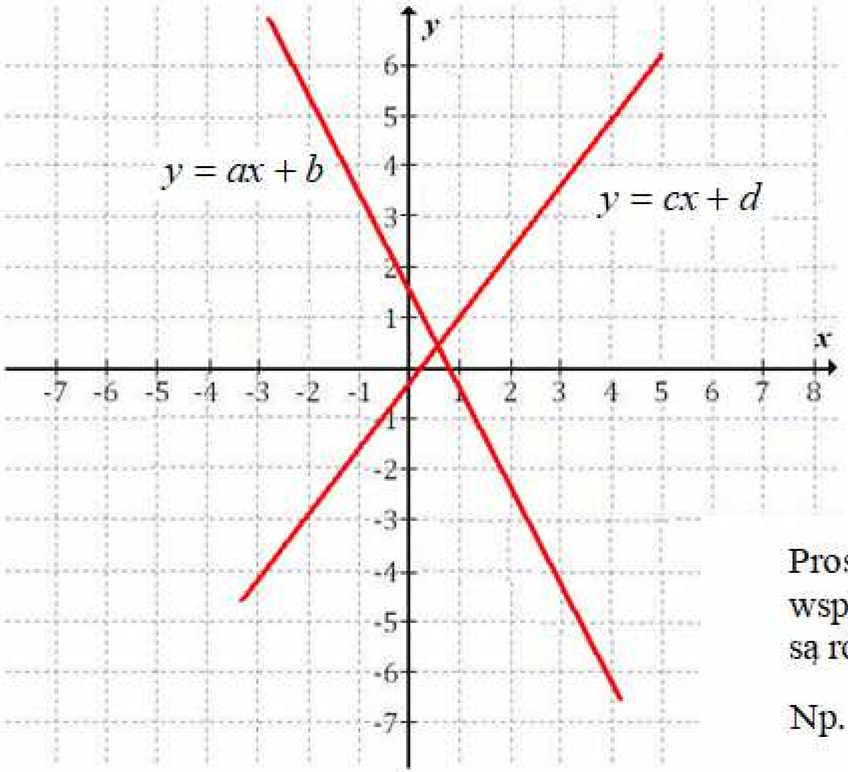
Przykład $\begin{cases} 8x - 4y = 16 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x - 4y = 16 \quad / :4 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 2x - y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$

linie są równoległe,
nie przecinają się

Rozpatrzmy układ równań dwóch linii prostych w postaci kierunkowej

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases}$$

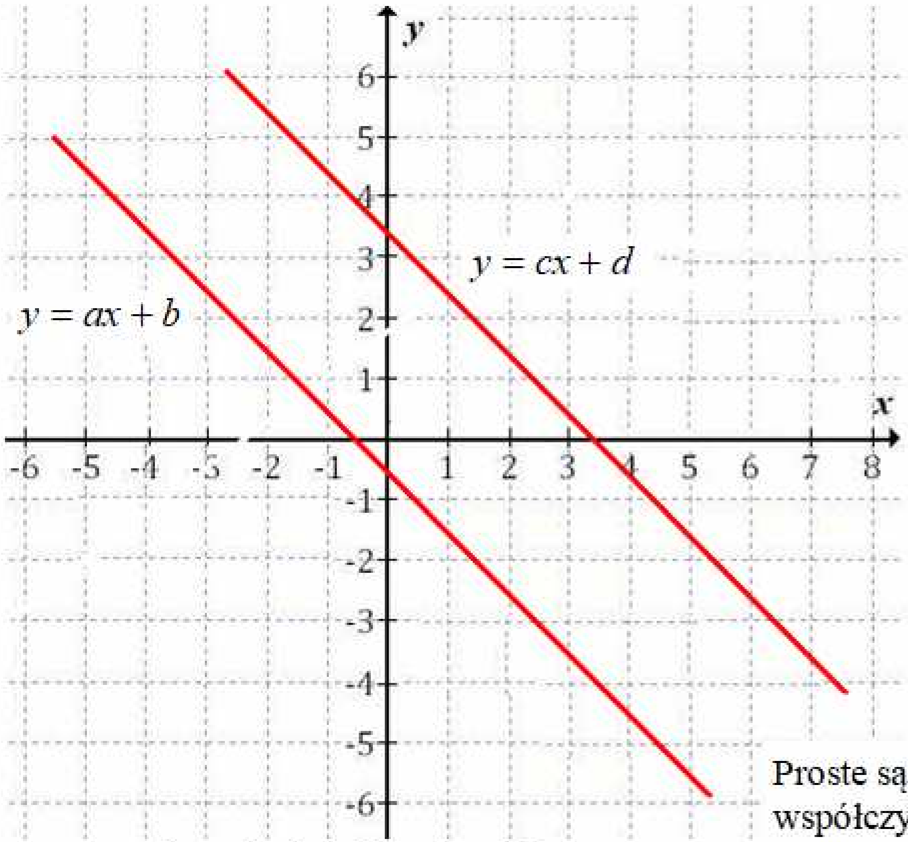
Każdy układ $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ można doprowadzić do takiej postaci.



Linie przecinają się.
Układ jest OZNACZONY, ma jedno rozwiązanie

Proste przecinają się jeśli ich współczynniki kierunkowe, są różne.

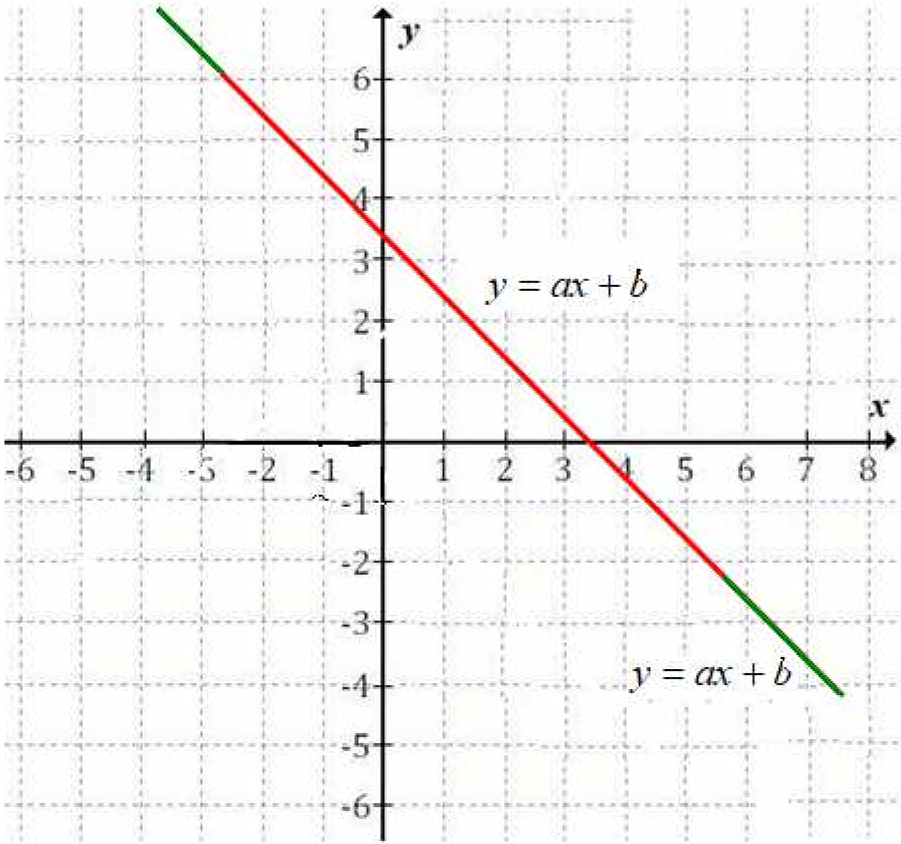
Np. $y = 3x + 2$ i $y = 5x - 17$
$y = -x + 20$ i $y = x$
$y = 0{,}5x$ i $y = 2x + 1$



Linie nie przecinają się.
Układ SPRZECZNY,
nie ma rozwiązań.

Proste są równoległe jeśli mają taki sam współczynnik kierunkowy.

Np. y = 3x + 2 i y = 3x – 17
y = –x +20 i y = –x
y = 0,5x i y = 0,5x + 1



Linie nakładają się.
Układ jest NIEOZNACZONY, ma nieskończenie wiele rozwiązań.

METODY ROZWIĄZYWANIA UKŁADÓW

METODA PODSTAWIANIA

Metoda podstawiania polega na wyznaczeniu z któregoś równania jednej niewiadomej i podstawieniu jej do drugiego równania.

Przykład $\begin{cases} x+2y=8 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ z pierwszego równania wyznaczamy x

$$\boxed{x=8-2y}$$

$$\begin{cases} x=8-2y \\ 2x-y=1 \end{cases}$$

i tak obliczony x wstawiamy do drugiego równania.

$$\begin{cases} x=8-2y \\ 2(8-2y)-y=1 \end{cases}$$

$$2(8-2y)-y=1 \Rightarrow 16-5y=1 \Rightarrow -5y=-15 \Rightarrow y=3$$

Znając wartość y obliczamy x ze wzoru $x=8-2y \Rightarrow x=8-2\cdot 3=2$

Rozwiązanie: $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

UWAGA: wyznaczanie jednej ze zmiennych można też dokonać z drugiego równania i wtedy tak obliczoną wartość wstawić do pierwszego, nie jest też ważne czy będzie to x czy y.

METODY ROZWIĄZYWANIA UKŁADÓW

METODA PRZECIWNYCH WSPÓŁCZYNNIKÓW

Ta metoda polega na dodawaniu równań stronami, w sytuacji gdy przy tej samej niewiadomej w dwóch równaniach mamy przeciwne współczynniki.

Przykład $\begin{cases} x+2y=8 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ drugie równanie pomnożymy stronami przez 2

$$\begin{cases} x+2y=8 \\ 2x-y=1 \quad /\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=8 \\ 4x-2y=2 \end{cases}$$

dzięki temu przy zmiennych y mamy przeciwne współczynniki

dodajemy równania stronami $\begin{cases} x+2y=8 \\ 4x-2y=2 \end{cases}$

$$+\ \overline{\quad 5x=10 \quad} \Rightarrow \quad x=2$$

Teraz z dowolnego równania obliczamy y wstawiając $x=2$.

$$2x-y=1 \Rightarrow 2\cdot 2-y=1 \Rightarrow -y=1-4 \Rightarrow -y=-3 \Rightarrow y=3$$

Rozwiązanie: $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

UWAGA: nie jest istotne przy której zmiennej chcemy uzyskać przeciwne współczynniki, może to być przy zmiennej x albo y, tak jak jest łatwiej do obliczeń, nie jest też ważne, które równanie przekształcamy, można drugie, można pierwsze, a także i jedno i drugie.

METODY ROZWIĄZYWANIA UKŁADÓW

METODA GRAFICZNA

Rozwiązanie układu równań tą metodą polega na narysowaniu prostych w układzie współrzędnych. Najpierw należy doprowadzić każde równanie do wzoru funkcji liniowej $y = ax + b$. Rysujemy obie proste i odczytujemy punkt ich przecięcia, który jest rozwiązaniem układu równań.

Na początku przekształcamy układ $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ do postaci $\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases}$.

Przykład 1

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = -x + 8 \\ -y = -2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{1}{2}x + 4 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

Przykład 2

$$\begin{cases} -2x - y = 4 \\ 6x + 3y = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y = 2x + 4 \\ 3y = -6x + 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x - 4 \\ y = -2x + 6 \end{cases}$$

Przykład 3

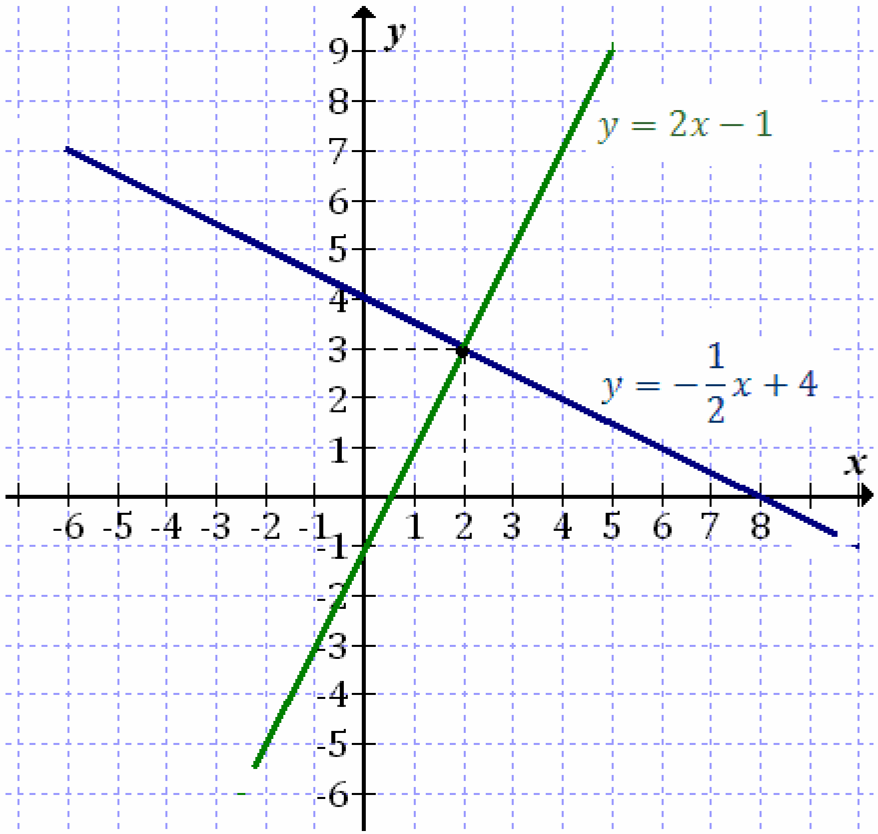
$$\begin{cases} 4x - y = 2 \\ 2x - 1 = \dfrac{1}{2}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y = -4x + 2 \\ \dfrac{1}{2}y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x - 2 \\ y = 4x - 2 \end{cases}$$

Następnie rysujemy wykresy funkcji i odczytujemy rozwiązania.

METODA GRAFICZNA

Przykład 1

$$\begin{cases} x+2y=8 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y=-x+8 \\ -y=-2x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+4 \\ y=2x-1 \end{cases}$$



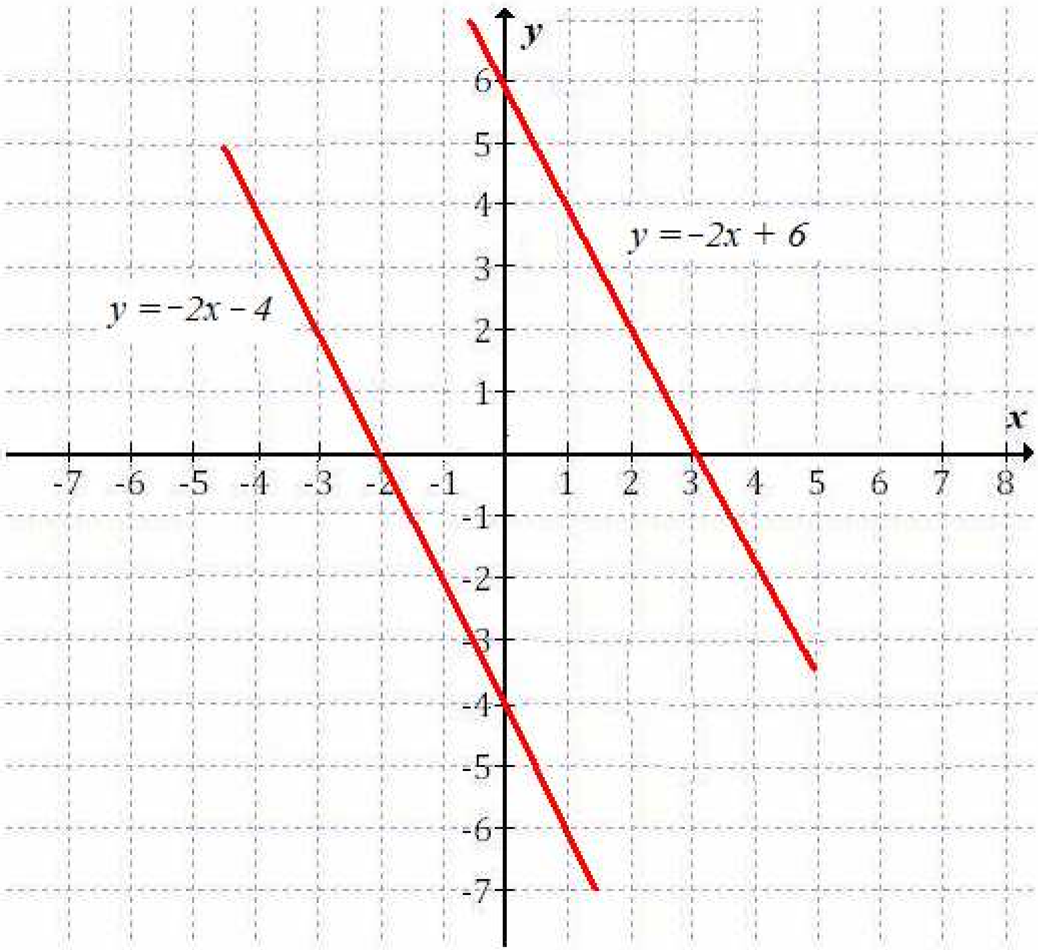
Wykresy przecinają się w punkcie (2; 3)

zatem rozwiązaniem układu jest para liczb $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$.

METODA GRAFICZNA

Przykład 2

$$\begin{cases} -2x - y = 4 \\ 6x + 3y = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y = 2x + 4 \\ 3y = -6x + 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x - 4 \\ y = -2x + 6 \end{cases}$$

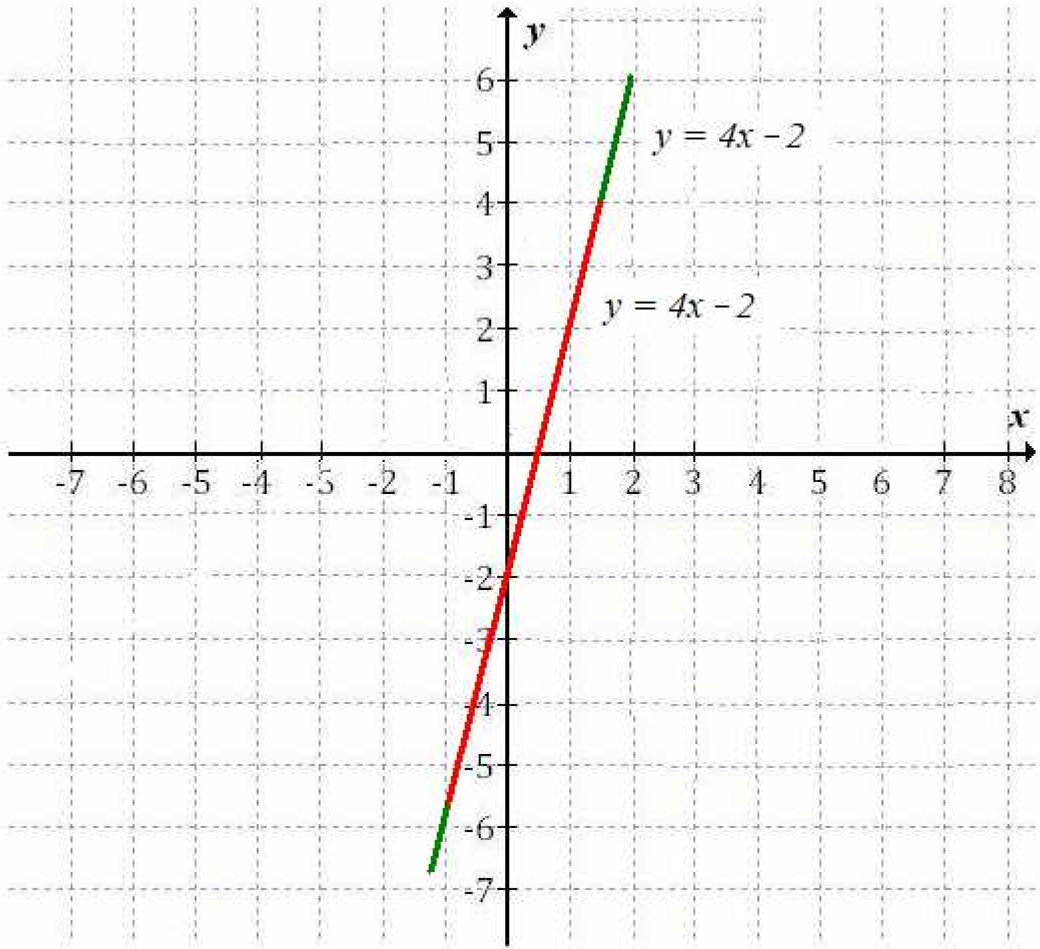


Proste są równoległe. Układ nie ma rozwiązań, jest sprzeczny.

METODA GRAFICZNA

Przykład 3

$$\begin{cases} 4x - y = 2 \\ 2x - 1 = \frac{1}{2}y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y = -4x + 2 \\ \frac{1}{2}y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x - 2 \\ y = 4x - 2 \end{cases}$$



Proste nakładają się.
Układ jest nieoznaczony, ma nieskończenie wiele rozwiązań.

ZADANIE TEKSTOWE

Test składał się z 20 pytań. Uczeń odpowiedział na wszystkie pytania. Za każdą prawidłową odpowiedź otrzymał dwa punkty, a za każdą błędną stracił jeden punkt. Ostatecznie uczeń otrzymał 16 punktów. Ilu poprawnych, a ilu błędnych odpowiedzi udzielił uczeń?

Rozwiązanie:

x – ilość poprawnych odpowiedzi,
y – ilość błędnych odpowiedzi.

Układamy równania: $\begin{cases} x + y = 20 \\ 2 \cdot x - 1 \cdot y = 16 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 2x - y = 16 \end{cases}$$

Zastosujemy metodę przeciwnych współczynników

$$+\begin{cases} x + y = 20 \\ 2x - y = 16 \end{cases}$$
$$\overline{\quad 3x = 36 \quad}$$

$$3x = 36 \Rightarrow x = 12$$

$$x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x \Rightarrow y = 8$$

Odpowiedź: Na 20 pytań uczeń udzielił 12 poprawnych odpowiedzi i 8 błędnych.