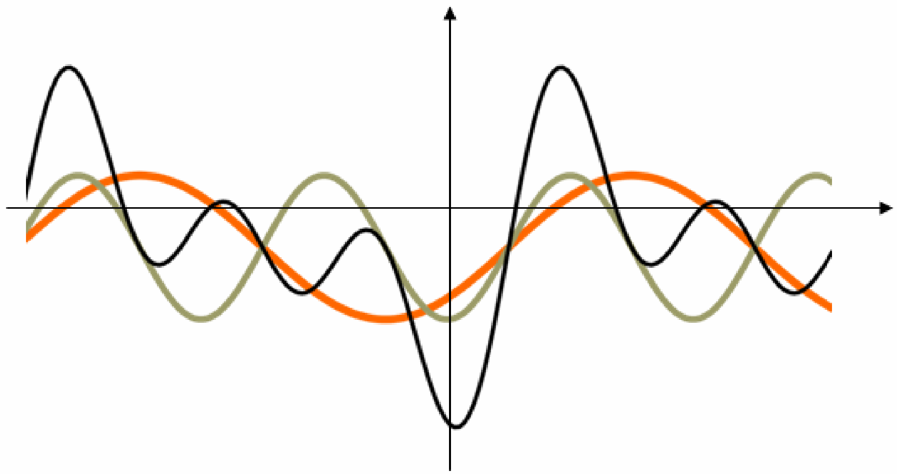
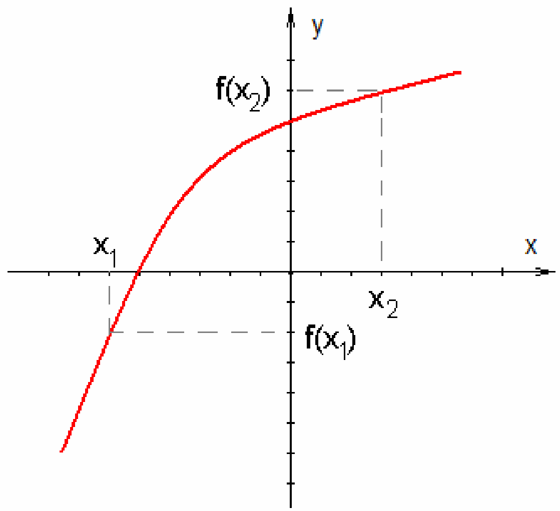
WŁASNOŚCI FUNKCJI



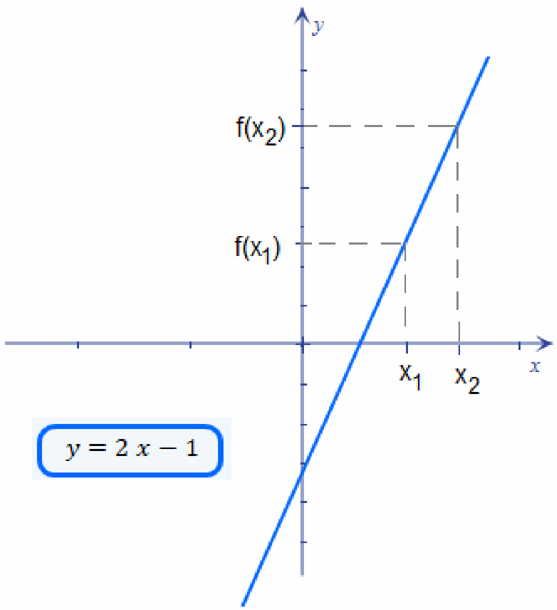
FUNKCJA ROSNĄCA

Funkcja $f: X \to Y$ jest rosnąca jeśli wraz ze wzrostem argumentów x rosną także jej wartości y. Czyli, że dla wszystkich argumentów $x_1, x_2 \in X$ takich, że $x_1 < x_2$ zachodzi nierówność $f(x_1) < f(x_2)$.

$$\boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)}$$



Przykład 1 $f(x) = 2x - 1$



$f(x_1) = 2x_1 - 1$

$f(x_2) = 2x_2 - 1$

Załóżmy, że $x_1 < x_2$. Mnożymy obie strony przez 2.

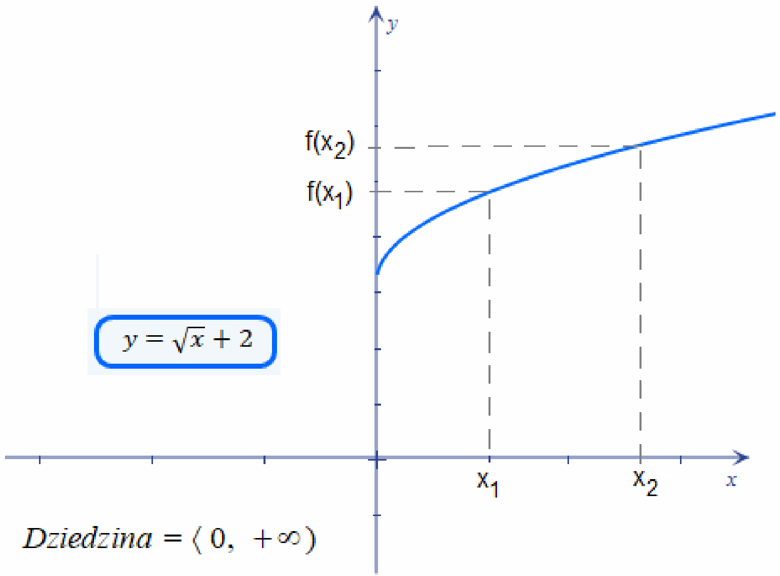
$2x_1 < 2x_2$ Od obu stron odejmujemy 1.

$2x_1 - 1 < 2x_2 - 1$ Zatem jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkcja $f(x) = 2x - 1$ *jest rosnąca.*

$Dziedzina = (-\infty, +\infty)$

Przykład 2 $f(x) = \sqrt{x} + 2$



Dziedzina $= \langle 0, +\infty)$

$f(x_1) = \sqrt{x_1} + 2$

$f(x_2) = \sqrt{x_2} + 2$

Załóżmy, że $x_1 < x_2$, stąd $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$.

Do obu stron dodajemy 2. $\sqrt{x_1} + 2 < \sqrt{x_2} + 2$

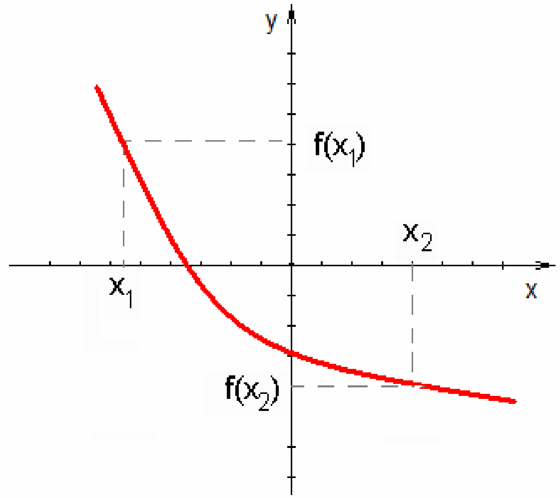
Zatem jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkcja $f(x) = \sqrt{x} + 2$ *jest rosnąca.*

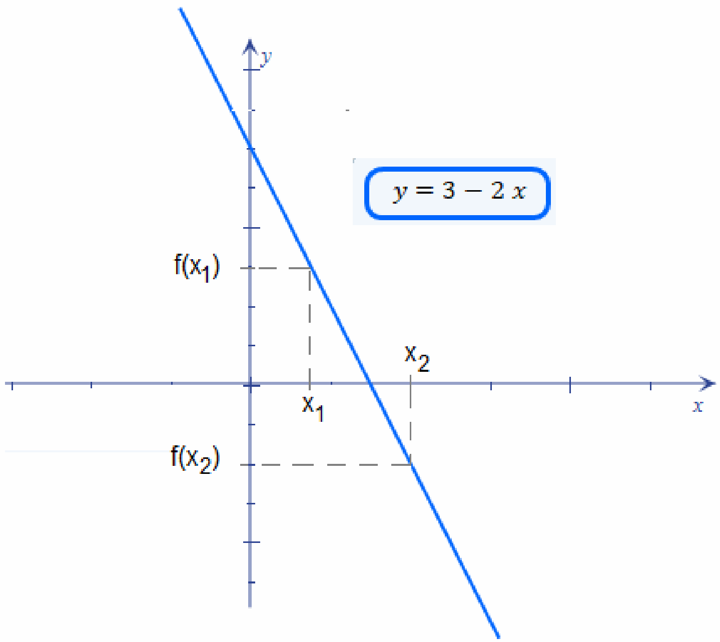
FUNKCJA MALEJĄCA

Funkcja f: $X \longrightarrow Y$ jest malejąca jeśli wraz ze wzrostem argumentów x maleją jej wartości y.
Czyli, że dla wszystkich argumentów $x_1, x_2 \in X$ takich, że $x_1 < x_2$ zachodzi nierówność $f(x_1) > f(x_2)$.

$$\boxed{x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) > f(x_2)}$$



Przykład 3 $f(x) = -2x + 3$



$Dziedzina = (-\infty, +\infty)$

$f(x_1) = -2x_1 + 3$

$f(x_2) = -2x_2 + 3$

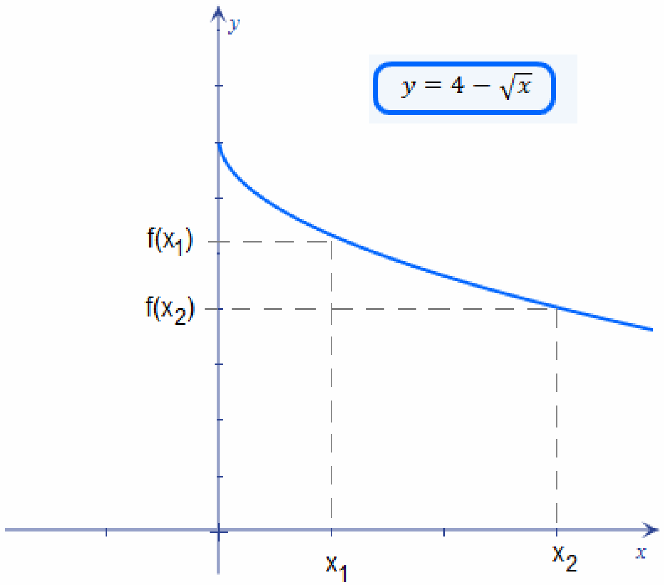
Załóżmy, że $x_1 < x_2$, stąd $-2x_1 > -2x_2$.

Do obu stron dodajemy 3. $-2x_1 + 3 > -2x_2 + 3$

Zatem jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkcja $f(x) = -2x + 3$ *jest malejąca*.

Przykład 4



$Dziedzina = \langle 0, +\infty)$

$f(x_1) = 4 - \sqrt{x_1}$

$f(x_2) = 4 - \sqrt{x_2}$

Załóżmy, że $x_1 < x_2$, stąd $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$.

Mnożymy obie strony przez (–1). $-\sqrt{x_1} > -\sqrt{x_2}$

Do obu stron dodajemy 4. $4 - \sqrt{x_1} > 4 - \sqrt{x_2}$

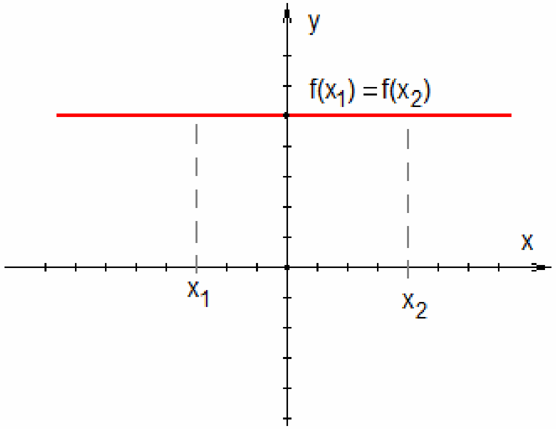
Zatem jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) > f(x_2)$.

Funkcja $f(x) = 4 - \sqrt{x}$ *jest malejąca*

FUNKCJA STAŁA

Funkcja f: X $\longrightarrow$ Y jest stała jeśli dla wszystkich argumentów x_1, $x_2 \in X$ zachodzi równość $f(x_1) = f(x_2)$.

$$\boxed{x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)}$$



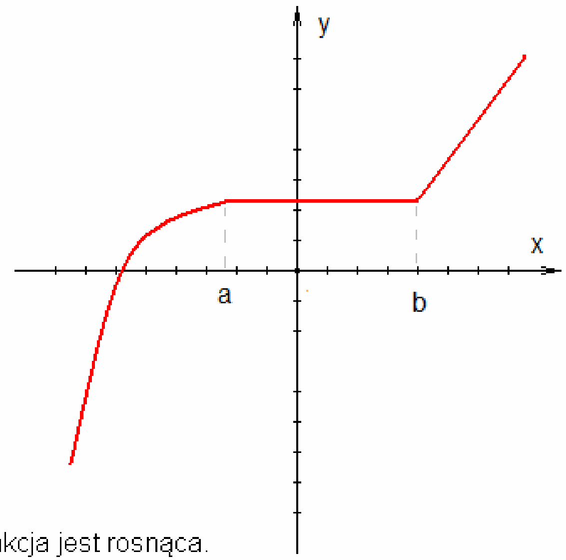
Wykres funkcji stałej jest linią prostą równoległą do osi x.

Funkcja stała nie jest ani rosnąca, ani malejąca.

FUNKCJA NIEMALEJĄCA

Funkcja f: X $\longrightarrow$ Y jest niemalejąca jeśli dla wszystkich argumentów x_1, $x_2 \in X$ takich, że $x_1 < x_2$ zachodzi nierówność $f(x_1) \leq f(x_2)$.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$



W przedziale $(-\infty, a\rangle$ funkcja jest rosnąca.

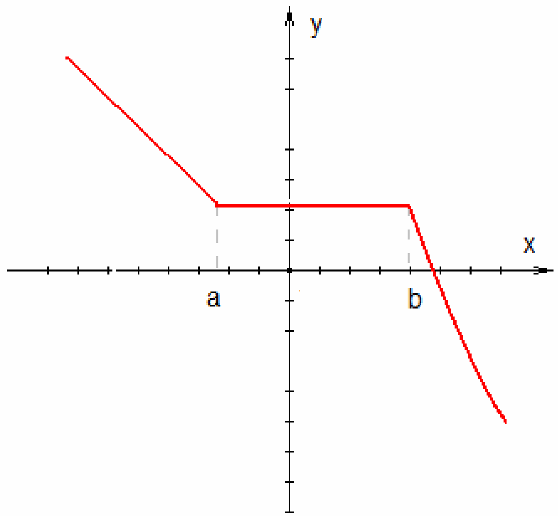
W przedziale $\langle a, b\rangle$ funkcja jest stała.

W przedziale $\langle b, +\infty)$ funkcja jest rosnąca.

FUNKCJA NIEROSNĄCA

Funkcja f: X $\longrightarrow$ Y jest nierosnąca jeśli dla wszystkich argumentów x_1, $x_2 \in X$ takich, że $x_1 < x_2$ zachodzi nierówność $f(x_1) \geq f(x_2)$.

$$\boxed{x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2)}$$



W przedziale $(-\infty, a\rangle$ funkcja jest malejąca.

W przedziale $\langle a, b\rangle$ funkcja jest stała.

W przedziale $\langle b, +\infty)$ funkcja jest malejąca.

WNIOSKI:

Każda funkcja rosnąca jest niemalejąca.

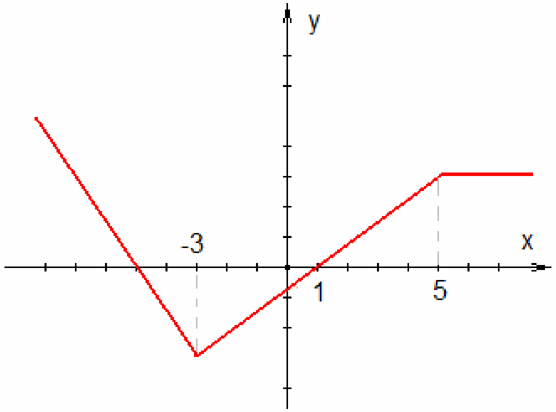
Każda funkcja malejąca jest nierosnąca.

Funkcja stała jest i niemalejąca i nierosnąca.

FUNKCJA MONOTONICZNE

Funkcja jest monotoniczna jeśli jest rosnąca albo malejąca albo stała albo niemalejąca albo nierosnąca.

Funkcja może być monotoniczna w przedziałach.
Badanie monotoniczności polega właśnie na odnajdywaniu takich przedziałów.

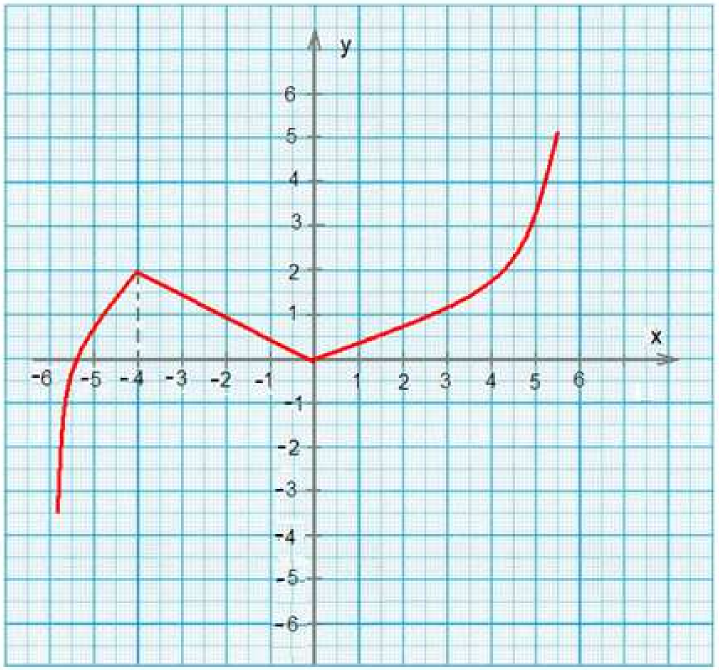


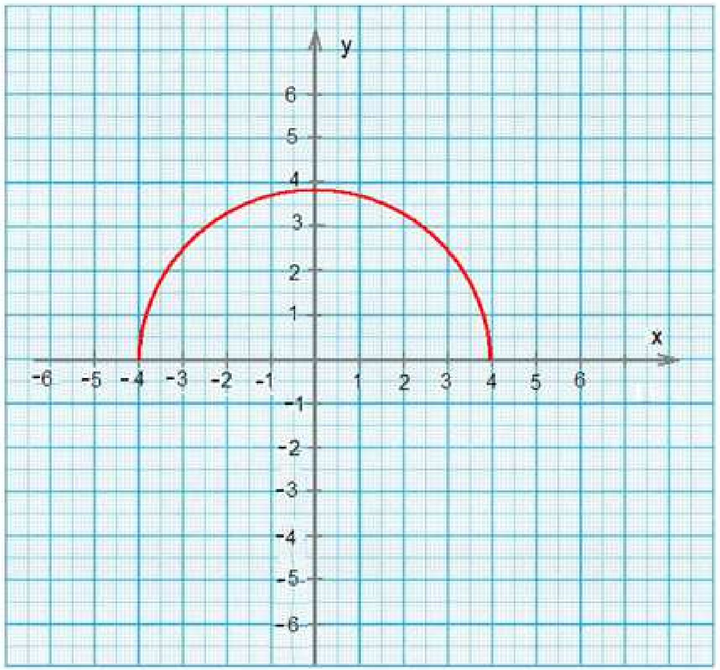
W przedziale $(-\infty, -3\rangle$ funkcja jest malejąca.

W przedziale $\langle -3, 5\rangle$ funkcja jest rosnąca.

W przedziale $\langle 5, +\infty)$ jest stała.

PRZYKŁADY





rosnąca dla $x \in (-\infty, -4\rangle$

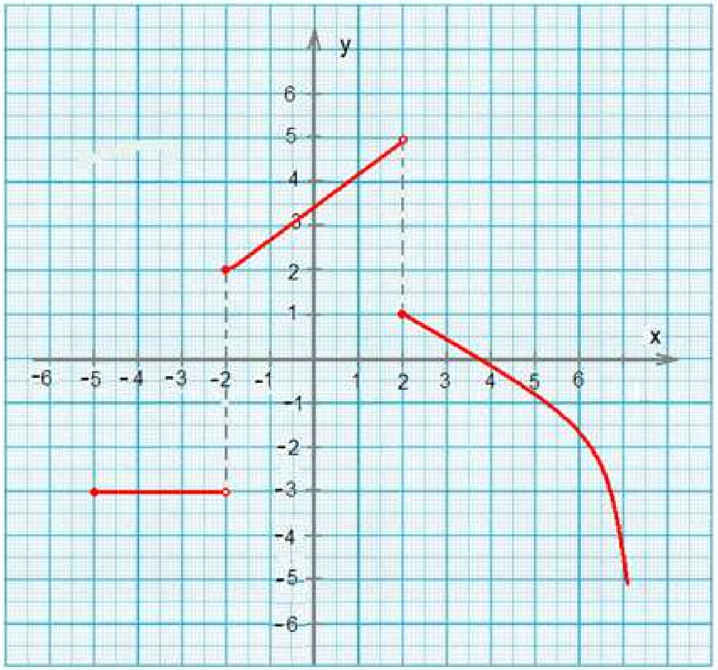
malejąca dla $x \in \langle -4, 0\rangle$

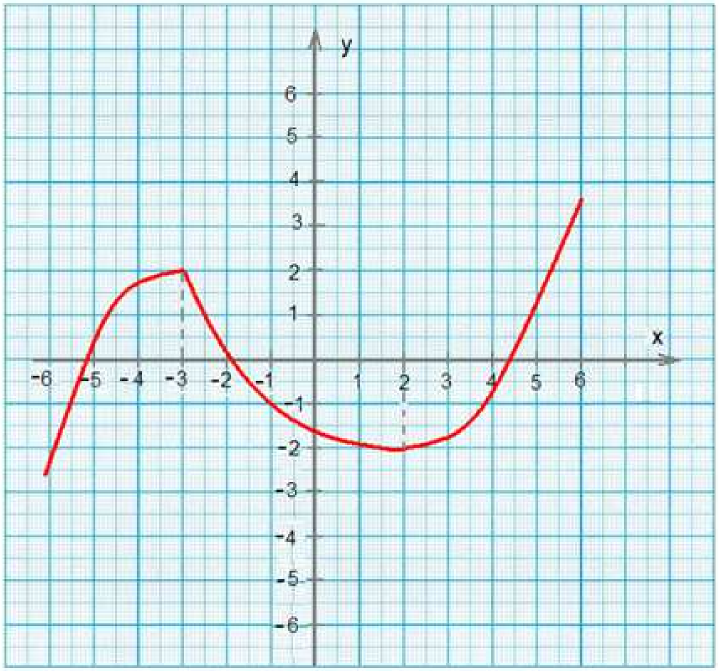
rosnąca dla $x \in \langle 0, +\infty)$

rosnąca dla $x \in \langle -4, 0\rangle$

malejąca dla $x \in \langle 0, 4\rangle$

PRZYKŁADY





stała dla $x \in \langle -5, -2)$

rosnąca dla $x \in \langle -2, 2)$

malejąca dla $x \in \langle 2, +\infty)$

rosnąca dla $x \in (-\infty, -3\rangle$

malejąca dla $x \in \langle -3, 2\rangle$

rosnąca dla $x \in \langle 2, +\infty)$